

2.9.19 Logaritmické rovnice I

Př. 1: Vyřeš rovnici $\log_2 x = 3$.

Jde řešit z paměti: Ptáme se jaké číslo vznikne, když umocníme 2 (základ logaritmu) na třetí (hodnota logaritmu = hodnota exponentu). Jde o číslo $2^3 = 8$. $K = \{8\}$

Pokud se podaří logaritmickou rovnici upravit do tvaru $\log_a(\text{výraz1}) = \log_a(\text{výraz2})$, můžeme přejít k rovnici $\text{výraz1} = \text{výraz2}$. Protože funkce $y = \log_a x$ je prostá, je tato úprava ekvivalentní. Této úpravě se říká odlogaritmování.

Př. 2: Napiš následující čísla jako logaritmy při uvedeném základu:

- a) $3 \{\log_{10}\}$ b) $2 \{\log_5\}$ c) $-1 \{\log_{0,5}\}$ d) $0,5 \{\log_4\}$
e) $0 \{\log_\pi\}$ f) $\sqrt{2} \{\log_3\}$

a) $3 = \log_{10} 10^3 = \log_{10} 1000$

b) $2 = 2 \log_5 5 = \log_5 5^2 = \log_5 25$

c) $-1 = \log_{0,5} 0,5^{-1} = \log_{0,5} 2$

d) $0,5 = \log_4 4^{0,5} = \log_4 2$

e) $0 = \log_\pi \pi^0 = \log_\pi 1$

f) $\sqrt{2} = \sqrt{2} \log_3 3 = \log_3 3^{\sqrt{2}}$

Př. 3: Vyřeš rovnice:

- a) $\log_2(x-2) = 4$ b) $\log_3(2x+1) = 2$ c) $\log_{0,5}(2-x) = -2$
d) $3\log_2(3x+1) = 6$ e) $\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = -1$
f) $\log_{0,5} \log_4 x = -4$ (jinak zapsáno $\log_{0,5}(\log_4 x) = -4$)

a) $\log_2(x-2) = 4$ Podmínka: $x > 2$

$\log_2(x-2) = \log_2 2^4$

$\log_2(x-2) = \log_2 16$ - rovnost logaritmů $\Rightarrow$

můžeme odlogaritmovat:

$x-2=16$ $x=18$ $K=\{18\}$

c) $\log_{0,5}(2-x) = -2$ $2 > x$

$\log_{0,5}(2-x) = \log_{0,5} 0,5^{-2}$

$\log_{0,5}(2-x) = \log_{0,5} 0,5^{-2}$

$\log_{0,5}(2-x) = \log_{0,5} 4$ - odlogaritmuje

$2-x=4$ $-2=x$ $K=\{-2\}$

e) $\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = -1$ $x > -1$.

$\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$\log_{\frac{1}{3}}(1+x) = \log_{\frac{1}{3}} 3$ - odlogaritmuje

$1+x=3$ $x=2$ $K=\{2\}$

b) $\log_3(2x+1) = 2$ $x > -\frac{1}{2}$

$\log_3(2x+1) = \log_3 3^2$

$\log_3(2x+1) = \log_3 9$

$2x+1=9$ $x=4$ $K=\{4\}$

d) $3\log_2(3x+1) = 6$ $x > -\frac{1}{3}$.

Problém: levá strana není logaritmus

$\log_2(3x+1) = 2$

$\log_2(3x+1) = \log_2 2^2$ - odlogaritmuje

$3x+1=4$ $x=1$ $K=\{1\}$

f) $\log_{0,5} \log_4 x = -4$ $x > 0$.

$\log_{0,5} \log_4 x = \log_{0,5} 0,5^{-4}$ - odlogaritmuje

$\log_4 x = 0,5^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$

$\log_4 x = \log_4 4^{16}$ - odlogaritmuje

$x=4^{16}$ $K=\{4^{16}\}$

Př. 4: Vyřeš rovnice:

a) $\log_2(x^2+x) = \log_2(-2x)$

b) $\log_2(x^2-x) = \log_2(3-3x)$

c) $2\log x = \log(x+6)$

$$a) \log_2(x^2 + x) = \log_2(-2x)$$

Podmínky: $x^2 + x > 0$, $-2x > 0$,
zkontrolujeme dosazením až získáme
kandidáty na kořeny.

$$\log_2(x^2 + x) = \log_2(-2x)$$

$$x^2 + x = -2x \quad x^2 + 3x = 0 \quad x(x+3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -3$$

Ověření podmínek:

$$x_1 = 0: 0^2 + 0 > 0 \text{ - nevyhovuje}$$

$$x_2 = -3: (-3)^2 + (-3) = 9 - 3 = 6 > 0$$

$$-2x = -2(-3) = 6 > 0 \quad K = \{-3\}$$

$$b) \log_2(x^2 - x) = \log_2(3 - 3x)$$

Podmínky: $x^2 - x > 0$, $3 - 3x > 0$,
zkontrolujeme dosazením až získáme
kandidáty na kořeny.

$$\log_2(x^2 - x) = \log_2(3 - 3x)$$

$$x^2 - x = 3 - 3x \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0 \quad x_1 = -3 \quad x_2 = 1$$

Ověření podmínek:

$$x_1 = -3: (-3)^2 - (-3) = 9 + 3 > 0$$

$$x_2 = 1: 1^2 - 1 = 0 \text{ - nevyhovuje}$$

$$K = \{-3\}$$

$$c) 2 \log x = \log(x+6) \text{ Podmínky: } x > 0, x+6 > 0$$

$2 \log x = \log(x+6)$ - nejde odlogaritmovat, levá strana není logaritmus

$\log x^2 = \log(x+6)$ - teď už můžeme odlogaritmovat

$$x^2 = x+6 \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad (x-3)(x+2) = 0 \quad x_1 = 3 \quad x_2 = -2$$

$$\text{Ověření podmínek: } x_1 = 3: 3 > 0 \quad x_2 = -2: -2 < 0 \text{ nevyhovuje} \quad K = \{3\}$$

Př. 5: Vyřeš rovnice:

$$a) \ln \log_2 \log_{0,5} x = 0 \text{ (jinak } \ln(\log_2[\log_{0,5} x]) = 0) \quad b) \log_8(2 \log_3[1 + \log_2\{2 - \log_{0,5} x\}]) = \frac{1}{3}$$

$$a) \ln \log_2 \log_{\frac{1}{2}} x = 0 \quad \text{Podmínka: } x > 0.$$

$$\ln \log_2 \log_{\frac{1}{2}} x = \ln 1 \quad \log_2 \log_{\frac{1}{2}} x = 1$$

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 2 \quad \log_{\frac{1}{2}} x = 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ - odlogaritmuje}$$

$$x = \frac{1}{4} \quad K = \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

$$b) \log_8(2 \log_3[1 + \log_2\{2 - \log_{0,5} x\}]) = \frac{1}{3} \quad \text{Podmínka: } x > 0.$$

$$\log_8(2 \log_3[1 + \log_2\{2 - \log_{0,5} x\}]) = \log_8 8^{\frac{1}{3}}$$

$$\log_8(2 \log_3[1 + \log_2\{2 - \log_{0,5} x\}]) = \log_8 2 \text{ - odlogaritmuje}$$

$$2 \log_3[1 + \log_2\{2 - \log_{0,5} x\}] = 2 \quad / : 2 \quad \log_3[1 + \log_2\{2 - \log_{0,5} x\}] = 1$$

$$\log_3[1 + \log_2\{2 - \log_{0,5} x\}] = \log_3 3 \text{ - odlogaritmuje}$$

$$1 + \log_2\{2 - \log_{0,5} x\} = 3 \quad \log_2\{2 - \log_{0,5} x\} = 2$$

$$\log_2\{2 - \log_{0,5} x\} = \log_2 2^2 \text{ - odlogaritmuje}$$

$$2 - \log_{0,5} x = 4 \quad -\log_{0,5} x = 2$$

$$\log_{0,5} x = -2 = \log_{0,5} 0,5^{-2} \text{ - odlogaritmuje}$$

$$x = 4 \quad K = \{4\}$$

Př. 6: Petáková:

strana 35, cvičení 9 b), c), e), f), g), h)

strana 35, cvičení 10 c), d)